3.2 Théorème de (Cartan et) Von Neumann sur les sous-groupes fermés de $GL_n(\mathbb{K})$ (106, 155, 214, 215) [8]

Le but de ce développement est de montrer qu'un sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{K})$ est automatiquement une sous-variété de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, ce qui est assez remarquable !

Définition 3.9 (Groupe de Lie linéaire)**.** On dit que $G \subset GL_n(\mathbb{K})$ est un *groupe de Lie linéaire* si G est un sous-groupe fermé dans $GL_n(\mathbb{K})$ (pour la topologie usuelle).

Proposition 3.10 (L'algèbre de Lie d'un groupe de Lie linéaire)**.** Soit G un groupe de Lie linéaire. On note :

$$\mathfrak{g} = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid \forall t \in \mathbb{K}, \ \exp(tM) \in G\}.$$

$\mathfrak{g}$ est alors un $\mathbb{K}$-espace vectoriel stable par l'opération :

$$\begin{array}{rccl} [\cdot,\cdot] & : & \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2 & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ & & (A,B) & \longmapsto & [A,B] = AB - BA \end{array}$$

appelé *algèbre de Lie* du groupe de Lie linéaire G. L'opération $[\cdot,\cdot]$ est appelée *crochet de Lie.*

Démonstration. Étant donné que G est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$, on a que $\mathbf{O}_n \in \mathfrak{g}$. En effet, pour tout t réel, $\exp(t\mathbf{O}_n) = I_n \in G$. La stabilité de $\mathfrak{g}$ par multiplication scalaire est aussi claire : si $\lambda \in \mathbb{K}$ et si $M \in \mathfrak{g}$, alors pour tout $t \in \mathbb{K}$, $t\lambda \in \mathbb{K}$ et donc $\exp(t\lambda M) \in G$. Reste à montrer la stabilité par somme, beaucoup moins évidente. Pour cela, on va observer le fait suivant :

$$\forall M, N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \quad \left(\exp\left(\frac{M}{k}\right)\exp\left(\frac{N}{k}\right)\right)^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \exp(M+N).$$

Pour cela, on utilise le théorème d'inversion locale : l'application exp matricielle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ (théorème de différentiation sous le signe somme) et sa différentielle en la matrice $\mathbf{O}_n$ est $id_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}$. En effet :

$$\forall H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \quad \exp(H) - I_n = H + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{H^k}{k!} = H + o(\|H\|).$$

Ainsi, la différentielle $\mathrm{d}\exp(\mathbf{O}_n)$ est inversible et le théorème d'inversion locale assure l'existence de voisinages $U \in \mathscr{V}(\mathbf{O}_n)$ et $V \in \mathscr{V}(I_n)$ tels que l'exponentielle réalise un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme entre les deux. On appelle Log l'application réciproque :

$$\mathrm{Log} \ : \ V \longrightarrow U$$

en particulier, $\mathrm{Log}(I_n) = \mathbf{O}_n$. De ce fait, si $M, N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont fixés, alors :

$$\exp\left(\frac{M}{k}\right)\exp\left(\frac{N}{k}\right) = I_n + \frac{M+N}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

et donc, pour k assez grand :

$$\exp\left(\frac{M}{k}\right)\exp\left(\frac{N}{k}\right) \in V.$$

On peut donc appliquer le Log à cette quantité pour obtenir :

$$\mathrm{Log}\left(\exp\left(\frac{M}{k}\right)\exp\left(\frac{N}{k}\right)\right) = \mathrm{Log}\left(I_n + \frac{M+N}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) = \frac{M+N}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Ce développement limité est bien valide car la différentielle du Log en I_n est, comme l'exponentielle en $\mathbf{O}_n$, égale à $id_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}$. Pourquoi ? Eh bien parce que :

$$id_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})} = \mathrm{d}\left(\exp \circ \operatorname{Log}\right)(I_n) = \mathrm{d}\exp(\mathbf{O}_n) \circ \mathrm{d}\operatorname{Log}(I_n) = \mathrm{d}\operatorname{Log}(I_n).$$

Ainsi :

$$k \operatorname{Log}\left(\exp\left(\frac{M}{k}\right)\exp\left(\frac{N}{k}\right)\right) \xrightarrow[k\to+\infty]{} M+N.$$

On peut alors passer à l'exponentielle dans cette limite par continuité, et, en gardant en tête le fait suivant :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \quad \exp(kM) = \exp(M)^k,$$

on a :

$$\exp\left(k \operatorname{Log}\left(\exp\left(\frac{M}{k}\right)\exp\left(\frac{N}{k}\right)\right)\right) = \left(\exp\left(\frac{M}{k}\right)\exp\left(\frac{N}{k}\right)\right)^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \exp(M+N).$$

Une preuve analogue montre que :

$$\left(\exp\left(\frac{M}{k}\right)\exp\left(\frac{N}{k}\right)\exp\left(\frac{-M}{k}\right)\exp\left(\frac{-N}{k}\right)\right)^{k^2} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \exp([M,N]).$$

Ainsi, si $M, N \in \mathfrak{g}$, alors, pour tout $t \in \mathbb{K}$, on a :

$$\exp(t(M+N)) = \lim_{k\to+\infty}\left(\exp\left(\frac{tM}{k}\right)\exp\left(\frac{tN}{k}\right)\right)^k.$$

Or, étant donné que $M, N \in \mathfrak{g}$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\exp\left(\frac{tM}{k}\right), \exp\left(\frac{tN}{k}\right) \in G.$$

Ainsi :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \left(\exp\left(\frac{tM}{k}\right)\exp\left(\frac{tN}{k}\right)\right)^k \in G.$$

Et donc, par fermeture de G :

$$\exp(t(M+N)) \in G.$$

Donc $M+N \in \mathfrak{g}$. De même, on montre que $[M,N] \in \mathfrak{g}$, ce qui conclut.

Remarque 3.2.1 (À propos du logarithme matriciel)**.** *On a montré l'existence et la régularité du logarithme matriciel via le théorème d'inversion locale. Cependant, ledit théorème ne nous dit rien sur ce que peuvent être les voisinages U et V. On peut en fait montrer que :*

$$\forall M \in \overset{\circ}{B}(I_n,1), \quad \operatorname{Log}(M) = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{(M-I_n)^k}{k}$$

en remarquant que la série est bien définie (car converge normalement pour une norme d'algèbre) et qu'on a la relation dans les séries formelles :

$$\operatorname{Log}(\exp(X)) = \exp(\operatorname{Log}(X)) = X.$$

Et donc, cette relation se transporte sur les matrices.

On est prêt à prouver le théorème de (Cartan et) Von Neumann. □

Théorème 3.11 ((Cartan,) Von Neumann)**.** Soit $G \subset GL_n(\mathbb{K})$ un groupe de Lie linéaire. Alors G est une sous-variété de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont l'espace tangent en I_n est son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

Démonstration. Commençons par évacuer d'emblée le cas où G est discret (par exemple si G est fini). Si G est discret, alors G est automatiquement une sous-variété, de dimension 0. En effet, en chaque $M \in G$, on peut trouver un voisinage ouvert V dans $GL_n(\mathbb{K})$ tel que :

$$V \cap G = \{M\}.$$

Ainsi, toute application :

$$\{\mathbf{O}_n\} \quad \longrightarrow \quad G$$

réalise un difféomorphisme local, faisant de G une sous-variété de $GL_n(\mathbb{K})$ de dimension 0, et les espaces tangents en chaque point sont égaux à $\{\mathbf{O}_n\}$. Montrons alors que $\mathfrak{g} = \{\mathbf{O}_n\}$. Si tel n'était pas le cas, alors on aurait l'existence d'une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \setminus \{\mathbf{O}_n\}$ telle que :

$$\mathbb{K}M \subset \mathfrak{g}.$$

Or, l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & G \\ t & \longmapsto & \exp(tM) \end{array}$$

est continue et donc, son image est un ensemble connexe contenant I_n. Or, si G est discret, sa composante connexe contenant l'identité est simplement $\{I_n\}$. Ainsi, on a :

$$\forall t \in \mathbb{K}, \quad \exp(tM) = I_n.$$

Ainsi, en dérivant par rapport à la variable t :

$$\forall t \in \mathbb{K}, \quad M\exp(tM) = \mathbf{O}_n.$$

Par inversibilité de $\exp(tM)$, on obtient :

$$M = \mathbf{O}_n. \quad \textbf{CONTRADICTION !}$$

Supposons alors G non-discret et connexe. On peut supposer G connexe, car, si G est un groupe de Lie linéaire, sa composante connexe contenant I_n que l'on notera G_0 est un sous-groupe fermé de G, donc de $GL_n(\mathbb{K})$ et de même algèbre de Lie que G. En effet, on les propriétés suivantes sont vérifiées :

— $I_n \in G_0$,

— Si $M, N \in G_0$, alors $MN^{-1} \in G_0$. En effet, on a l'existence de chemins continus $\gamma_M, \gamma_N \in \mathscr{C}^0([0,1], G_0)$ reliant I_n à M et N respectivement. Ainsi le chemin :

$$\begin{array}{cccc} \gamma : & [0,1] & \longrightarrow & G \\ & t & \longmapsto & \gamma_M(t)\gamma_N(t)^{-1} \end{array}$$

est continu par continuité de γ_M, γ_N, de l'inversion et de la multiplication dans $GL_n(\mathbb{K})$. Il est également bien défini car pour tout $t \in [0,1]$ $\gamma_M(t), \gamma_N(t) \in G_0 \subset G$ donc $\gamma_M(t)\gamma_N(t)^{-1} \in G$. De plus, γ est un chemin tracé dans G_0 car $\gamma([0,1])$ doit être connexe et contenir l'identité car $\gamma(0) = I_n \times I_n = I_n$, donc $\gamma([0,1]) \subset G_0$, et enfin, il relie I_n à MN^{-1}, ce qui conclut.

Reste à montrer que, en notant $\mathfrak{g}_0$ l'algèbre de Lie du groupe G_0, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}$. L'inclusion $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}$ est claire : si $M \in \mathfrak{g}_0$, alors :

$$\forall t \in \mathbb{K}, \quad \exp(tM) \in G_0 \subset G.$$

Réciproquement, si $M \in \mathfrak{g}$, alors l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & G \\ t & \longmapsto & \exp(tM) \end{array}$$

est continue et, par connexité de $\mathbb{K}$, l'image de cette application est incluse dans G_0, donc $M \in \mathfrak{g}_0$.

Pour montrer que G est une sous-variété, nous allons utiliser la caractérisation par *nappe paramétrée* : pour tout $P \in G$, il existe des voisinages ouverts $U \in \mathscr{V}_{\mathfrak{g}}(\mathbf{O}_n)$ et $V \in \mathscr{V}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}(P)$ et une application $j \in \mathscr{C}^\infty(U, G \cap V)$ telle que $j(\mathbf{O}_n) = P$, $\mathrm{d}j(\mathbf{O}_n)$ soit injective et j soit un homéomorphisme.

Étape 1 : L'exponentielle paramétrise G grâce à $\mathfrak{g}$ en I_n.

Tout le travail consiste à trouver des voisinages $U \in \mathscr{V}_{\mathfrak{g}}(\mathbf{O}_n)$ et $V \in \mathscr{V}_G(I_n)$ tels que exp réalise un homéomorphisme entre les deux. Ça n'a rien d'évident et le théorème d'inversion locale ne permet pas d'établir l'existence de tels voisinages ! Si $M \in G$ est proche de I_n, rien ne nous dit que $\mathrm{Log}(M) \in \mathfrak{g}$! Il nous faut passer par un lemme intermédiaire afin de trouver des éléments de G proches de I_n tels que leur Log (ou une expression qui s'en rapproche) finisse dans $\mathfrak{g}$.

Lemme 3.12. Soit $(H_k)_{k\in\mathbb{N}} \in G^{\mathbb{N}}$ tel que :

$$H_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} I_n$$

et :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad H_k \neq I_n.$$

Alors toute valeur d'adhérence de la suite $\left(\dfrac{\mathrm{Log}(H_k)}{\|\mathrm{Log}(H_k)\|}\right)$ (bien définie à partir d'un certain rang) appartient à l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

Démonstration. Quitte à prendre une extraction de cette suite (qui est dans la sphère unité), on peut considérer qu'elle converge vers une matrice $H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $t \in \mathbb{K}$. On a :

$$\exp(tH) = \lim_{k\to+\infty} \exp\left(t\frac{\mathrm{Log}(H_k)}{\|\mathrm{Log}(H_k)\|}\right).$$

Posons $i_k = \left\lfloor \dfrac{t}{\|\mathrm{Log}(H_k)\|} \right\rfloor \in \mathbb{Z}$ et $\theta_k = \dfrac{t}{\|\mathrm{Log}(H_k)\|} - i_k \in [0,1)$. On a alors :

$$\exp\left(t\frac{\mathrm{Log}(H_k)}{\|\mathrm{Log}(H_k)\|}\right) = H_k^{i_k} \times \exp(\theta_k \mathrm{Log}(H_k)).$$

Or, $H_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} I_n$, donc $\mathrm{Log}(H_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathbf{O}_n$. Ainsi, étant donné que $\theta_k \in [0,1)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\exp(\theta_k \mathrm{Log}(H_k)) \xrightarrow[k\to+\infty]{} I_n.$$

Ainsi :

$$\exp(tH) = \lim_{k\to+\infty} H_k^{i_k}.$$

Or, $H_k \in G$ pour tout k, donc $H_k^{i_k} \in G$ pour tout k. Ainsi, par fermeture de G :

$$\exp(tH) \in G.$$

Donc $H \in \mathfrak{g}$. $\square$

Ce lemme permet en outre de montrer le fait suivant : si $\mathfrak{g}'$ est un supplémentaire de $\mathfrak{g}$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors :

$$\exists W \in \mathscr{V}_{\mathfrak{g}'}(\mathbf{O}_n), \quad \exp(W) \cap G = \{I_n\}.$$

En effet, si tel n'était pas le cas, alors n'importe quelle boule $B_{\mathfrak{g}'}\left(\mathbf{O}_n, \frac{1}{k}\right)$ serait telle que :

$$\exp\left(B_{\mathfrak{g}'}\left(\mathbf{O}_n, \frac{1}{k}\right)\right) \cap G \neq \{I_n\}.$$

On pourrait alors construire une suite $H_k = \exp(N_k)$ vérifiant les hypothèses du lemme, de sorte que toute valeur d'adhérence de la suite $\left(\dfrac{N_k}{\|N_k\|}\right)$ appartiendrait à $\mathfrak{g}$, serait non-nulle car de norme 1 mais appartiendrait également à $\mathfrak{g}'$ car tous les termes de la suite y appartiennent ! **CONTRADICTION !** Posons alors :

$$\begin{array}{rcccl} \Phi & : & \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}' & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{K}) \\ & & (M, M') & \longmapsto & \exp(M)\exp(M'), \end{array}$$

de sorte que :

$$\Phi(M, M') = I_n + M + M' + o\left(\sqrt{\|M\|^2 + \|M'\|^2}\right),$$

i.e.

$$\forall (H, H') \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}', \quad \mathrm{d}\Phi(\mathbf{O}_n, \mathbf{O}_n) \cdot (H, H') = H + H'.$$

Du fait que $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}'$ sont en somme directe, la différentielle de Φ en $(\mathbf{O}_n, \mathbf{O}_n)$ est inversible. Par le théorème d'inversion locale, il existe des voisinages $U \in \mathscr{V}_{\mathfrak{g}'}(\mathbf{O}_n)$, $W \in \mathscr{V}_{\mathfrak{g}'}(\mathbf{O}_n)$ et $V \in \mathscr{V}_{GL_n(\mathbb{K})}(I_n)$ tels que Φ réalise un difféomorphisme entre $U \times W$ et V. Montrons alors que $\exp(U) \in \mathscr{V}_G(I_n)$: quitte à réduire W, on peut le supposer tel que :

$$\exp(W) \cap G = \{I_n\}$$

comme nous l'avons dit plus haut. On a alors $V = \Phi(U \times W)$ vérifiant :

$$\exp(U) = V \cap G.$$

En effet, en considérant les couples $(M, \mathbf{O}_n)$, $M \in \mathfrak{g}$, on a que $\exp(M) = \Phi(M, \mathbf{O}_n) \in V$ et puisque $M \in \mathfrak{g}$, $\exp(M) \in G$. On a donc $\exp(U) \subset V \cap G$. Réciproquement, si $N \in V \cap G$, alors :

$$\exists (M, M') \in U \times W, \quad N = \exp(M)\exp(M').$$

Ainsi :

$$\exp(M') = \exp(-M)N \in G.$$

Or, $M' \in W$, et $\exp(W) \cap G = \{I_n\}$. Ainsi, $M' = \mathbf{O}_n$. Donc $N = \exp(M)$, ce qui donne bien que $V \cap G \subset \exp(U)$. Cela conclut donc cette étape ! En effet, on a trouvé un voisinage U de $\mathbf{O}_n$ dans $\mathfrak{g}$ et un voisinage V de I_n dans $GL_n(\mathbb{K})$ tels que exp réalise un homéomorphisme entre U et $V \cap G$!

Étape 2 : Passer de I_n aux autres points de G :

Si $P \in G$, l'application :

$$\begin{array}{rcccl} \mu_P & : & GL_n(\mathbb{K}) & \longmapsto & GL_n(\mathbb{K}) \\ & & N & \longmapsto & PN \end{array}$$

est un difféomorphisme global. Ainsi, en notant $V_P = \mu_P(V)$ et $j_P = \mu_P \circ \exp$, on a que V_P est un voisinage de P dans $GL_n(\mathbb{K})$ tel que $j_P(\mathbf{O}_n) = P$, $\mathrm{d}j_P(\mathbf{O}_n) = \mu_P \circ \mathrm{d}\exp(\mathbf{O}_n)$ soit injective, et j_P réalise un homéomorphisme entre U et $V_P \cap G = \mu_P(V \cap G)$ grâce à l'étape 1. On a donc montré que G était une sous-variété de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension égale à $\dim(\mathfrak{g})$!

<u>Étape 3 : L'espace tangent en I_n est l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$:</u>

Si $M \in \mathfrak{g}$, alors la courbe :

$$\begin{array}{rccl} \varphi_M & : & \mathbb{K} & \longrightarrow & G \\ & & t & \longmapsto & \exp(tM) \end{array}$$

est de classe $\mathscr{C}^1$, tracée dans G, telle que :

$$\varphi_M(0) = I_n$$

et :

$$\varphi'_M(0) = M.$$

Ainsi, on a :

$$\mathfrak{g} \subset T_{I_n} G$$

et par égalité des dimensions, on a égalité ! $\square$